

Metodología para desarrollar una página web para resolver ejercicios de momento de una fuerza en tres dimensiones

Herman Cancino Moreno¹, Norma Nélida Morfín Maldonado², Lucrecia Liera Aguilera³, Rubén Zepeda García⁴, Luis Gabriel González Vázquez^{5*}, Talia Castillo Hernández⁶

Resumen. Este artículo documenta la metodología empleada para diseñar, desarrollar y verificar, con asistencia de inteligencia artificial (IA) generativa, una calculadora web de acceso libre que resuelve ejercicios de momento de una fuerza en tres dimensiones para cursos de estática en ingeniería. El propósito fue sistematizar un proceso reproducible por otros docentes sin software comercial ni formación avanzada en programación. El procedimiento se organizó en cinco etapas basado en el modelo ADDIE y produjo una aplicación HTML5, CSS3 y JavaScript que determinan el momento respecto a un punto mediante la ecuación $M = r \times F$, el momento resultante mediante el teorema de Varignon y el momento respecto a un eje mediante el producto triple escalar, con visualización tridimensional interactiva y desarrollo paso a paso. Se evaluó su confiabilidad con cuatro problemas de Hibbeler y Johnston. El error relativo promedio con respecto a los libros fue en un rango de 0.04% y l máximo 0.17%, atribuible al redondeo. La metodología generó una herramienta confiable que refuerza la comprensión del producto vectorial, y la verificación cruzada entre herramienta, solución manual y fuente resulta indispensable al desarrollar materiales didácticos con IA.

Palabras clave: Momento de una fuerza, Producto vectorial, Estática, Calculadora interactiva, Inteligencia artificial generativa, Recurso educativo abierto.

Abstract - This article documents the methodology used to design, develop, and verify with the assistance of generative artificial intelligence (AI) a freely accessible web-based calculator that solves three dimensional moment of force problems for engineering statics courses. The goal was to systematize a process that could be replicated by other instructors without the need for commercial software or advanced programming training. The procedure was organized into five stages based on the ADDIE model and resulted in an HTML5, CSS3, and JavaScript application that calculates the moment about a point using the equation $M = r \times F$, the resultant moment using Varignon's theorem, and the moment about an axis using the triple scalar product, with interactive three-dimensional visualization and step-by-step solutions. Its reliability was evaluated using four problems by Hibbeler and Johnston. The average relative error compared to textbooks ranged from 0.04% to a maximum of 0.17%, attributable to rounding. The methodology generated a reliable tool that reinforces understanding of the vector product, and cross-verification between the tool, manual solutions, and the source material is essential when developing AI-based instructional materials.

Keywords: Moment of a force, Cross product, Statics, Interactive calculator, Generative artificial intelligence, Open educational resource.

I. INTRODUCCIÓN

El momento de una fuerza respecto a un punto o a un eje es uno de los conceptos centrales de la estática, pues cuantifica la tendencia de una fuerza a hacer girar un cuerpo y constituye la base del análisis del equilibrio del cuerpo rígido. En tres dimensiones, su cálculo se formaliza mediante el producto vectorial $M = r \times F$, el teorema de Varignon y el producto triple escalar, herramientas que los textos clásicos de la disciplina desarrollan de manera sistemática [1], [2]. Sin embargo, la investigación educativa ha documentado que estos contenidos figuran entre los que presentan mayores dificultades conceptuales en los cursos de estática [3]; en particular, la aplicación de la regla de la mano derecha y la interpretación del sentido del producto vectorial dependen fuertemente de la representación y del contexto del problema [4], y las dificultades con los vectores se agudizan al pasar de dos a tres dimensiones [5].

¹ Herman Cancino Moreno, Tecnológico Nacional de México / IT de Ciudad Guzmán. morenoherman.cm@cdguzman.tecnm.mx

² Norma Nélida Morfín Maldonado, Tecnológico Nacional de México / IT de Ciudad Guzmán. norma.mm@cdguzman.tecnm.mx

³ Lucrecia Liera Aguilera, Tecnológico Nacional de México / IT de Ciudad Guzmán. lucrecia.la@cdguzman.tecnm.mx

⁴ Rubén Zepeda García, Tecnológico Nacional de México / IT de Ciudad Guzmán. IBMday@cdguzman.tecnm.mx

^{5*} Luis Gabriel González Vázquez, Tecnológico Nacional de México / IT de Ciudad Guzmán. luis.gv@cdguzman.tecnm.mx (autor corresponsal)

⁶ Talia Castillo Hernández, Tecnológico Nacional de México / IT de Ciudad Guzmán. talia.ch@cdguzman.tecnm.mx

Diversos estudios han mostrado que las simulaciones y herramientas computacionales interactivas, diseñadas con principios pedagógicos explícitos, favorecen la comprensión conceptual y el involucramiento de los estudiantes de ciencias e ingeniería [6]; un metaanálisis reciente reporta un tamaño de efecto de 0.686 (g de Hedges) de los laboratorios virtuales sobre el aprendizaje en ingeniería [7], y otro sobre el aprendizaje basado en simulaciones en educación superior informa efectos positivos grandes, especialmente cuando la simulación se acompaña de andamiaje instruccional [8]. Estas herramientas potencian más que sustituyen la enseñanza tradicional [9] y, en el ámbito de la estática, existen precedentes de cursos web interactivos con ejercicios autoevaluables [10]. En un trabajo previo se documentó una metodología de cinco etapas para construir, con apoyo de IA generativa, una calculadora web de descomposición vectorial y equilibrio de la partícula en tres ejes, cuyo error relativo promedio frente a los libros de texto fue de 0.05 % [11]. Dicho trabajo propuso, como línea futura, extender la metodología al cálculo de momentos de fuerza en 3D.

Esta extensión no es trivial. A diferencia del equilibrio de la partícula, que conduce a un sistema de ecuaciones lineales, el cálculo de momentos exige que el estudiante construya correctamente el vector de posición desde el punto de referencia hasta cualquier punto de la línea de acción, desarrolle un determinante de 3×3 sin errores de signo, sume vectorialmente los momentos de varias fuerzas y, cuando se solicita el momento respecto a un eje, proyecte el resultado mediante un producto escalar. Cada uno de estos pasos es una fuente potencial de error que, en el estudio independiente o en entornos virtuales autogestionados, el estudiante no puede contrastar con la retroalimentación inmediata de un instructor.

Paralelamente, la IA generativa ha modificado las condiciones en que los docentes producen recursos didácticos: los modelos

de lenguaje de gran escala permiten generar materiales y código, pero exigen supervisión experta para validar lo que producen [12], [13]. Se ha documentado que los programadores asistidos por IA completan tareas de desarrollo web en JavaScript 55.8 % más rápido [14] y que estas herramientas reducen las barreras de entrada a la programación [15]; no obstante, el código generado puede contener fallas que sus usuarios no detectan y sobre cuya calidad muestran exceso de confianza [16], por lo que la UNESCO recomienda validar rigurosamente las herramientas antes de su uso con estudiantes [17].

En consecuencia, el objetivo del presente artículo es documentar la metodología utilizada para diseñar, desarrollar y verificar una página web interactiva, ejecutable en cualquier navegador sin instalación ni conexión a servidor, que resuelve ejercicios de momento de una fuerza en tres dimensiones, así como contrastar sus resultados con las respuestas publicadas de cuatro problemas tomados de los libros de texto de estática [1], [2], que ilustran tres casos: momento respecto a un punto, ángulo y proyección mediante el producto escalar, y momento respecto a un eje.

II. METODOLOGÍA

El desarrollo de la herramienta siguió las cinco etapas secuenciales de la metodología previa [11], inspiradas en el modelo ADDIE de diseño instruccional [18] y adaptadas al desarrollo de software educativo de una sola página, con un ciclo de retroalimentación entre la evaluación y el diseño. La Figura 1 sintetiza el organizador gráfico de las etapas, descritas a continuación.



Fig. 1. Organizador gráfico de las etapas metodológicas seguidas para el desarrollo de la calculadora interactiva de momentos en 3D.

1. Análisis. Se identificaron las necesidades pedagógicas del tema de momentos en tres dimensiones en los cursos de estática y se definió el modelo matemático que la herramienta debía resolver. Para cada fuerza F_i aplicada en un punto A_i , el momento respecto a un punto de referencia O es $M_i = r_i \times F_i$, con $r_i = A_i - O$; el momento resultante de un sistema de fuerzas se obtiene por el teorema de Varignon, $M_R = \sum(r_i \times F_i)$; y el momento respecto a un eje L de vector unitario $\hat{u}_L$ que pasa por O es el producto triple escalar $M_L = \hat{u}_L \cdot (r \times F)$ [1], [2]. Se determinó que la herramienta debía cubrir los tres casos que suelen plantearse

en los libros de texto: momento respecto a un punto, ángulo y proyección mediante el producto escalar, y momento respecto a un eje.

2. Diseño. Se conservó la interfaz de dos paneles de la calculadora anterior [11] para que el usuario reconozca el entorno. El panel izquierdo captura el sistema de unidades (SI o inglés, con conversión interna a SI y unidad de salida seleccionable), la convención de signos (dextrógira, $M = r \times F$, o levógira, $M = -(r \times F)$), las coordenadas del punto de referencia O , un número

arbitrario de fuerzas y dos opciones: la proyección sobre un eje L y el modo par de fuerzas, que genera automáticamente la fuerza $-F$ en O para mostrar que el momento de un par es un vector libre. Cada fuerza se define por su punto de aplicación A y por uno de tres modos de entrada, que reproducen las formas en que los libros de texto plantean los datos: componentes rectangulares, magnitud y ángulos directores (α, β, γ), o magnitud y un segundo punto de la línea de acción, en cuyo caso el vector unitario se calcula como $\hat{u} = (B - A)/|B - A|$. El panel derecho presenta tres pestañas: Gráfica 3D, Resultados y Procedimiento.

3. Desarrollo. La herramienta se codificó como una aplicación de una sola página (HTML5, CSS3 y JavaScript nativo, sin dependencias de backend), distribuable como un único archivo descargable que puede integrarse en cualquier plataforma de gestión del aprendizaje. El motor de cálculo se implementó en funciones independientes de álgebra vectorial (producto vectorial, producto escalar, magnitud, normalización), a partir de las cuales se calculan el vector de posición, el momento de cada fuerza, el momento resultante, su magnitud y sus ángulos directores, y la proyección sobre el eje L . La visualización tridimensional se construyó con la biblioteca WebGL Three.js [19] y muestra los ejes coordenados, el punto O , los vectores de posición, las fuerzas, los momentos individuales y el momento resultante, con rotación y zoom interactivos. Una función adicional genera el procedimiento textual: identificación del sistema, cálculo del vector unitario, vector de posición, desarrollo del determinante de 3×3 componente por componente, suma de Varignon y proyección sobre el eje; otra permite descargar la solución completa en un archivo de texto. Como en el trabajo previo, la codificación se realizó mediante un proceso iterativo con un modelo de IA generativa conversacional (cuenta PRO de Claude), en el que los autores especificaron en lenguaje natural los requisitos pedagógicos, el modelo matemático y la apariencia de la interfaz, y revisaron, probaron y corrigieron cada versión del código generado [12], [14].

4. Verificación. El motor de cálculo se contrastó con la resolución analítica de los cuatro problemas seleccionados y con las respuestas publicadas en los libros de texto [1], [2], mediante el error relativo porcentual, $\%error = |\text{valor del libro} - \text{valor de la calculadora}| / |\text{valor del libro}| \times 100$ (sección 3). Se probaron también casos límite: fuerzas cuya línea de acción pasa por O (momento nulo), puntos A y B coincidentes (que el programa detecta y reporta), el cambio de convención de signos y la conversión entre unidades del sistema inglés y del SI. Para que la verificación fuera reproducible e independiente de la captura manual, los datos de cada problema se introdujeron en la propia página mediante un navegador automatizado y se leyeron los resultados que el programa almacena internamente, sin redondeo de pantalla.

5. Implementación y evaluación. La herramienta se preparó como recurso descargable, con instrucciones de uso dirigidas a estudiantes sin experiencia previa en herramientas computacionales. Al tratarse de un archivo HTML autocontenido, puede usarse sin conexión una vez descargado. Se previó un ciclo de evaluación formativa con retroalimentación de los estudiantes y de docentes de estática, cuyos hallazgos alimentan la etapa de diseño de futuras versiones (Figura 1).

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados se presentan en dos apartados: en el primero se muestra, paso a paso, la solución del problema 4-42 [1] mediante la calculadora interactiva; en el segundo se presentan los enunciados y los resultados de los problemas 3.40, 3.45 y 3.46 [2], de modo que se comparan, mediante tablas, los tres casos de momento en tres dimensiones. En todos los casos se reporta la variación absoluta entre la respuesta del libro y la de la calculadora, así como el error relativo porcentual definido en la sección 2.

A. Ejemplo de uso de la calculadora interactiva

Problema 4-42. Ingeniería Mecánica Estática, décimo segunda edición en español [1]. Caso 1: momento respecto a un punto.

Determine el momento resultante producido por las fuerzas F_B y F_C respecto al punto O . Expresé el resultado como un vector cartesiano (Figura 2) [1].

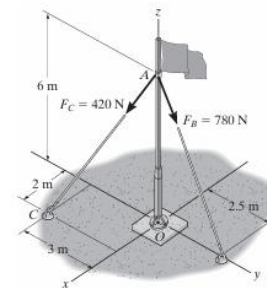


Fig. 2. Asta de bandera sostenida por dos cables, problema 4-42.

Fuente: [1]

A partir del esquema se obtienen los datos de la Tabla 1, que se introducen en la calculadora con el modo de entrada “Magnitud + 2 Puntos”. El origen se coloca en la base O del asta, de modo que ambas fuerzas actúan en el punto $A = (0, 0, 6)$ m y se dirigen hacia los anclajes B y C de los cables; el punto de referencia es $O = (0, 0, 0)$.

Tabla 1. Datos del problema 4-42 capturados en la calculadora.

Variable/constante	x	y	z	Magnitud
O	0	0	0	No aplica
A (aplicación)	0	0	6	No aplica
$B \rightarrow F_1 = F_B$	0	2.5	0	780 N
$C \rightarrow F_2 = F_C$	2	-3	0	420 N

La Figura 3 muestra la pestaña Resultados. En la tabla de descomposición por fuerza se despliegan, para cada fuerza, el vector de posición $r = (0, 0, 6)$ m, el vector fuerza calculado a partir de su magnitud y su vector unitario, $F_B = (0, 300, -720)$ N y $F_C = (120, -180, -360)$ N, y su momento individual, $M_1 = (-1800, 0, 0)$ N·m y $M_2 = (1080, 720, 0)$ N·m. En la última fila, la suma de Varignon da el momento resultante $M_R = (-720, 720, 0)$ N·m, con magnitud $|M_R| = 1018.2338$ N·m y ángulos directores

$\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$ y $\gamma = 90^\circ$. Este último valor muestra al estudiante que el momento resultante es perpendicular al asta, como corresponde a dos fuerzas que concurren en un punto del eje z.

DESCOMPOSICIÓN POR FUERZA			
	r (m)	F (N)	M (N·m)
F1	(0, 0, 6)	(0, 300, -720)	(-1800, 0, 0)
F2	(0, 0, 6)	(120, -180, -360)	(1080, 720, 0)
ΣM_R	—	—	(-720, 720, 0)

MOMENTO RESULTANTE M_R	
$M_R = \Sigma(r \times F)$	(-720, 720, 0) N·m
$ M_R $	1018.23376 N·m
Ángulos directores	$\alpha=135^\circ$ $\beta=45^\circ$ $\gamma=90^\circ$
Convención	Dextrógiro (mano derecha)

Fig. 3. Resultados obtenidos del problema 4-42.

En la Figura 4 se presenta la pestaña Gráfica 3D, en la que la calculadora dibuja, en un sistema dextrógiro, el punto de referencia O, el vector de posición del punto A, las dos fuerzas con código de colores, los momentos individuales M_1 y M_2 (magenta) y el momento resultante M_R (naranja). El estudiante puede rotar la escena y acercarla, lo que le permite comprobar visualmente que cada momento es perpendicular al plano formado por r y F y aplicar la regla de la mano derecha sobre la geometría real del problema, uno de los aspectos más difíciles del tema [4].

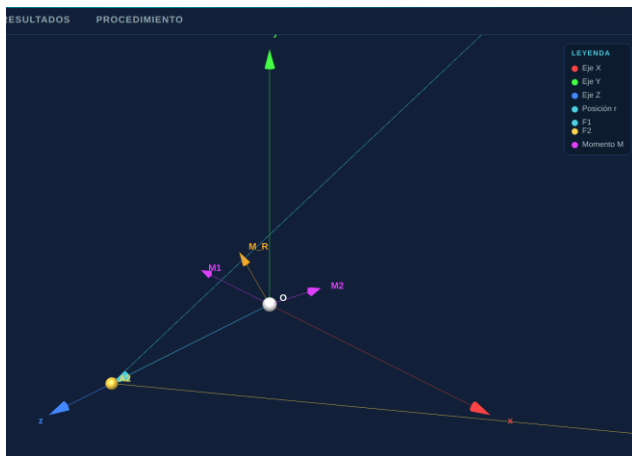


Fig. 4. Gráfica 3D del problema 4-42.

La Figura 5 muestra la pestaña Procedimiento, que reproduce la secuencia de solución que se enseña en los cursos de estática [1], [2]: (1) identificación del sistema y de la convención de signos; (2) para cada fuerza, cálculo del vector $A \rightarrow B$, de su magnitud, del vector unitario $\hat{u}$ y del vector fuerza; (3) vector de posición $r = A - O$; (4) desarrollo del determinante de 3×3 componente por componente; y (5) suma vectorial de los momentos (teorema de Varignon). Al presentar los productos cruzados término a término, por ejemplo $M_x = (0)(-720) - (6)(300) = -1800$, el estudiante puede localizar el paso exacto en el que cometió un error de signo, que es el error más frecuente en el desarrollo manual del determinante.

1 Identificación del Sistema
 Punto de referencia $O(0, 0, 0)$ m. Convención: dextrógiro (mano derecha, $M = r \times F$).
 El momento de una fuerza respecto a O se calcula mediante el producto cruz:
 $M_O = r \times F$
 donde $r = A - O$ (vector de posición)
 $F =$ vector fuerza

2 Fuerza F1 — Vector r y Producto Cruz
F1
 Modo: Magnitud + 2 Puntos (A - B)
 $A = (0, 0, 6)$ m $B = (0, 2.5, 0)$ m
 $AB = B - A = (0, 2.5, -6)$ m
 $|AB| = 6.5$ m
 $\hat{u} = AB / |AB| = (0, 0.38462, -0.92388)$
 $F1 = |F1| \cdot \hat{u} = 780 \times (0, 0.38462, -0.92388)$
 $F1 = (0, 300, -720)$ N
 $r1 = A1 - O = (0, 0, 6) - (0, 0, 0)$
 $r1 = (0, 0, 6)$ m
 Determinante 3x3:
 $M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 300 & -720 \end{vmatrix}$
 $M_x = (0)(-720) - (6)(300) = -1800$
 $M_y = (6)(0) - (0)(-720) = 0$
 $M_z = (0)(300) - (0)(0) = 0$
 $M1 = (-1800, 0, 0)$ N·m $|M1| = 1800$ N·m

Fig. 5. Procedimiento descrito por la calculadora interactiva para el problema 4-42.

En la Tabla 2 se comparan los resultados reportados en el libro con los obtenidos con la calculadora interactiva. La componente M_{Oz} es nula tanto en el libro como en la calculadora, por lo que no se incluye en el promedio.

Tabla 2. Comparación de resultados del problema 4-42.

Variable	Libro	Calculadora	Variación	% error
M_{Ox}	-720 N·m	-720.0000 N·m	0.0000 N·m	0.0000 %
M_{Oy}	720 N·m	720.0000 N·m	0.0000 N·m	0.0000 %
Promedio				0.0000 %

B. Validación con ejercicios de la bibliografía

A continuación, se presentan los resultados de otros tres problemas de momento en tres dimensiones.

Problema 3.40. Mecánica Vectorial para Ingenieros Estática undécima edición en español [2]. Caso 2: ángulo y proyección mediante el producto escalar.

Si se sabe que la tensión en el cable AD es de 180 lb, determine a) el ángulo entre el cable AD y el brazo AB, y b) la proyección sobre AB de la fuerza ejercida por el cable AD en el punto A (Figura 6) [2].

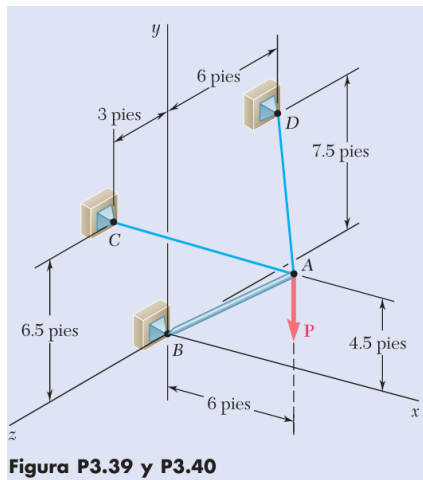


Figura P3.39 y P3.40

Fig. 6. Brazo sostenido por dos cables, problema 3.40. Fuente: [2]

Este caso no requiere un momento, sino un producto escalar. La calculadora no incluye un módulo específico de producto escalar, pero la proyección puede obtenerse con su función de proyección sobre un eje gracias a la identidad del producto triple escalar, $\hat{u}_L \cdot (r \times F) = F \cdot (\hat{u}_L \times r)$. Si se elige $\hat{u}_L = k$ y un vector de posición unitario $r = \lambda_{AB} \times k = (-0.6, 0.8, 0)$ ft, entonces $\hat{u}_L \times r = \lambda_{AB}$ y el momento M_L que reporta la herramienta es numéricamente igual a la proyección $F_{AD/AB} = \lambda_{AB} \cdot F_{AD}$, con $\lambda_{AB} = (-0.8, -0.6, 0)$. Así, se capturó la fuerza de 180 lb con su punto de aplicación en $(-0.6, 0.8, 0)$ ft y un segundo punto desplazado según el vector $AD = (-6, 3, -6)$ ft, y se activó la proyección sobre el eje z. La pestaña Procedimiento muestra el vector unitario $\lambda_{AD} = (-0.66667, 0.33333, -0.66667)$ y la fuerza $F_{AD} = (-120, 60, -120)$ lb; la proyección resultante es $F_{AD/AB} = 59.9999$ lb y el ángulo se obtiene como $\theta = \cos^{-1}(F_{AD/AB}/|F_{AD}|) = 70.5288^\circ$. Esta construcción, además de resolver el problema, ofrece al docente un recurso para mostrar la relación entre el producto escalar y el producto triple escalar. La diferencia de 0.0001 lb se debe a que la herramienta convierte las unidades del sistema inglés al SI con factores truncados ($1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$, $1 \text{ lb} = 4.44822 \text{ N}$ y $1 \text{ lb}\cdot\text{ft} = 1.35582 \text{ N}\cdot\text{m}$), lo que introduce una discrepancia relativa del orden de 10^{-6} . La Tabla 3 compara los resultados.

Tabla 3. Comparación de resultados del problema 3.40.

Variable	Libro	Calculadora	Variación	% error
θ	70.5°	70.5288°	0.0288°	0.0409 %
$F_{AD/AB}$	60.0 lb	59.9999 lb	0.0001 lb	0.0002 %
Promedio				0.0205 %

Problema 3.45. Mecánica Vectorial para Ingenieros Estática undécima edición en español [2]. Caso 3: momento respecto a un eje.

La tapa ABCD de un baúl de $0.732 \times 1.2 \text{ m}$ tiene bisagras a lo largo de AB y se mantiene abierta mediante una cuerda DEC que pasa sobre un gancho en E sin fricción. Si la tensión de la cuerda es de 54 N, determine el momento de la fuerza ejercida por la cuerda en D respecto a cada uno de los ejes coordenados (Figura 7) [2].

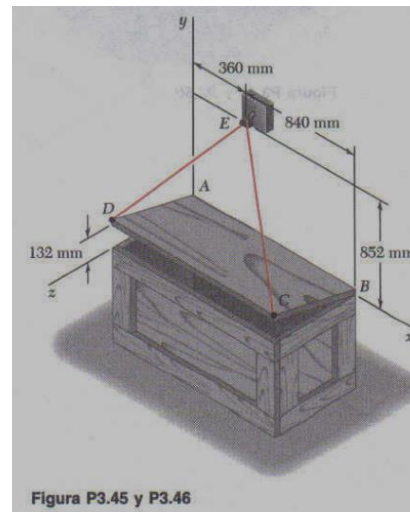


Figura P3.45 y P3.46

Fig. 7. Baúl con la tapa abierta, problemas 3.45 y 3.46. Fuente: [2]

Con el origen en A, la coordenada z del punto D se obtiene de la geometría de la tapa, $\sqrt{(732^2 - 132^2)} = 720 \text{ mm}$, de modo que $D = (0, 132, 720) \text{ mm}$ y $E = (360, 852, 0) \text{ mm}$. Estos datos se capturaron en milímetros y newtons, con la unidad del resultado fijada en $\text{N}\cdot\text{m}$; la conversión de unidades la realiza la propia herramienta y queda documentada en el primer paso del procedimiento. La fuerza de 54 N se definió con punto de aplicación D y segundo punto E, y se calculó la proyección sobre los ejes x, y y z con $\hat{u}_L = i, j$ y k , respectivamente. La calculadora obtuvo $\lambda_{DE} = (1/3, 2/3, -2/3)$, $F_{DE} = (18, 36, -36) \text{ N}$ y $M_A = (-30.672, 12.960, -2.376) \text{ N}\cdot\text{m}$, cuyas componentes coinciden con los momentos respecto a los ejes. La Tabla 4 compara los resultados.

Tabla 4. Comparación de resultados del problema 3.45.

Variable	Libro	Calculadora	Variación	% error
M_x	-30.7 $\text{N}\cdot\text{m}$	-30.6720 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.0280 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.0912 %
M_y	12.96 $\text{N}\cdot\text{m}$	12.9600 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.0000 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.0000 %
M_z	-2.38 $\text{N}\cdot\text{m}$	-2.3760 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.0040 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.1681 %
Promedio				0.0864 %

Problema 3.46. Mecánica Vectorial para Ingenieros Estática undécima edición en español [2]. Caso 3: momento respecto a un eje.

Para el baúl del problema anterior, determine el momento de la fuerza ejercida por la cuerda en C respecto a cada uno de los ejes coordenados (Figura 7) [2]. En este caso la fuerza de 54 N actúa en $C = (1200, 132, 720) \text{ mm}$ con dirección hacia E; la calculadora obtuvo $\lambda_{CE} = (-7/11, 6/11, -6/11)$, $F_{CE} = (-34.364, 29.455, -29.455) \text{ N}$ y $M_A = (-25.095, 10.604, 39.881) \text{ N}\cdot\text{m}$. La Tabla 5 compara los resultados.

Tabla 5. Comparación de resultados del problema 3.46.

Variable	Libro	Calculadora	Variación	% error
M_x	-25.1 $\text{N}\cdot\text{m}$	-25.0953 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.0047 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.0188 %
M_y	10.61 $\text{N}\cdot\text{m}$	10.6036 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.0064 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.0600 %
M_z	39.9 $\text{N}\cdot\text{m}$	39.8815 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.0185 $\text{N}\cdot\text{m}$	0.0465 %
Promedio				0.0418 %

Este problema aportó un hallazgo adicional. En la solución analítica desarrollada manualmente como referencia, el planteamiento del determinante es correcto, pero la componente final se reportó como $M_x = 31.45 \text{ N}\cdot\text{m}$, mientras que la calculadora obtuvo $M_x = -25.0953 \text{ N}\cdot\text{m}$. Al evaluar de nuevo la expresión planteada en la propia solución manual, $(0.132)(-29.45) - (0.72)(29.45) = -25.09 \text{ N}\cdot\text{m}$, se confirmó que el valor de la calculadora, que además coincide con la respuesta publicada en el libro, es el correcto y que la discrepancia provenía de un error aritmético en la solución manual. Este resultado ilustra el valor de la verificación cruzada entre tres fuentes independientes, la herramienta, la solución manual y el libro de texto, no solo para validar el código generado con IA, sino también los materiales didácticos elaborados a mano.

La Tabla 6 resume el error relativo promedio obtenido en cada uno de los cuatro problemas y el promedio general.

Tabla 6. Promedio obtenido de los casos estudiados.

Caso	Promedio de error %
Problema 4-42 (momento respecto a un punto).	0.0000 %
Problema 3.40 (ángulo y proyección).	0.0205 %
Problema 3.45 (momento respecto a un eje).	0.0864 %
Problema 3.46 (momento respecto a un eje).	0.0418 %
Promedio	0.0372 %

El error relativo promedio de los cuatro problemas fue de 0.0372 % (≈ 0.04 %), con un valor máximo de 0.1681 % en la componente M_z del problema 3.45. Estas diferencias no se originan en el motor de cálculo, sino en que los libros de texto reportan sus respuestas redondeadas a tres cifras significativas (cuatro cuando el primer dígito es 1) [2]: por ejemplo, el valor exacto $M_z = -2.376 \text{ N}\cdot\text{m}$ se publica como $-2.38 \text{ N}\cdot\text{m}$, lo que por sí solo introduce una diferencia de 0.17 %, y en el mismo problema la componente $M_y = 12.96 \text{ N}\cdot\text{m}$, reportada con cuatro cifras, coincide exactamente. En el problema 4-42, cuyos datos conducen a valores enteros, el error es nulo. Beer et al. señalan que, dada la incertidumbre de los datos en los problemas prácticos de ingeniería, rara vez es necesaria una exactitud superior a 0.2 % [2]; el error promedio obtenido es aproximadamente 5 veces menor que dicho umbral y ningún valor lo rebasa. Estos resultados son consistentes con los de la calculadora de descomposición vectorial (0.05 %) [11] y confirman que la metodología es transferible entre herramientas para distintos temas de la estática.

IV. CONCLUSIONES

La metodología de cinco etapas, análisis, diseño, desarrollo, verificación e implementación/evaluación, aplicada previamente a la descomposición vectorial [11], resultó transferible al cálculo de momentos en tres dimensiones y permitió construir una herramienta web funcional, verificada y adecuada para su uso como recurso didáctico en cursos de estática. La comparación con las respuestas publicadas de cuatro problemas de los libros de Hibbeler y de Beer y Johnston arrojó un error relativo promedio de 0.04 % y un máximo de 0.17 %, atribuible al re-

dondeo de las respuestas de los libros, lo que confirma la confiabilidad numérica del motor de cálculo en los tres casos estudiados: momento respecto a un punto, ángulo y proyección mediante el producto escalar, y momento respecto a un eje.

La diferencia principal entre la resolución manual y la calculadora no radica en el resultado, sino en el proceso: el desarrollo manual del determinante de 3×3 y la suma de momentos son susceptibles a errores de signo y aritméticos en cada paso, como lo demostró el error detectado en una de las soluciones manuales de referencia; la calculadora entrega el resultado en menos de un segundo, expone el desarrollo componente por componente y representa los vectores r , F y M en el espacio, lo que permite al estudiante verificar su trabajo y aplicar la regla de la mano derecha sobre la geometría real sin depender de un instructor, una ventaja relevante en el estudio independiente y en entornos virtuales autogestionados, dado el efecto de la retroalimentación oportuna sobre el aprendizaje [20]. La herramienta no sustituye el aprendizaje del método analítico, sino que lo refuerza.

Por otra parte, la experiencia confirma que la IA generativa permite a docentes sin formación especializada en programación desarrollar calculadoras a la medida de su curso en tiempos reducidos [12], [14], siempre que se acompañe de una verificación disciplinar rigurosa [16], [17]. El presente trabajo muestra, además, que esa verificación debe ser cruzada: la herramienta, la solución manual y el libro de texto se validan mutuamente, y la calculadora puede convertirse en un instrumento de control de calidad de los materiales didácticos elaborados por los docentes.

Como limitaciones, el estudio verifica la exactitud numérica de la herramienta pero aún no mide su efecto en el aprendizaje de los estudiantes, y el caso de ángulo y proyección requirió una construcción auxiliar basada en el producto triple escalar al no existir un módulo directo de producto escalar. Como trabajo futuro se propone incorporar dicho módulo, calcular los factores de conversión del sistema inglés como producto de los factores de longitud y fuerza, evaluar el impacto en el aprendizaje mediante un diseño con pretest y posttest, y extender la metodología al equilibrio del cuerpo rígido y a las armaduras espaciales.

REFERENCIAS

- [1] R. C. Hibbeler, Ingeniería mecánica: Estática, 12.a ed. Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación, 2010.
- [2] F. P. Beer, E. R. Johnston Jr., y D. F. Mazurek, Mecánica vectorial para ingenieros: Estática, 11.a ed. Ciudad de México, México: McGraw-Hill Education, 2017.
- [3] P. S. Steif y J. A. Dantzer, «A statics concept inventory: Development and psychometric analysis», J. Eng. Educ., vol. 94, n.o 4, pp. 363-371, 2005, doi: 10.1002/j.2168-9830.2005.tb00864.x.
- [4] M. B. Kustusch, «Assessing the impact of representational and contextual problem features on student use of right-hand rules», Phys. Rev. Phys. Educ. Res., vol. 12, n.o 1, p. 010102, 2016, doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.010102.
- [5] S. Sabah, «Science and engineering students' difficulties in understanding vector concepts», EURASIA J. Math. Sci. Technol. Educ., vol. 19, n.o 8, p. em2310, 2023, doi: 10.29333/ejmste/13431.
- [6] C. E. Wieman, W. K. Adams, y K. K. Perkins, «PhET: Simulations that enhance learning», Science, vol. 322, n.o 5902, pp. 682-683, oct. 2008, doi: 10.1126/science.1161948.

- [7] J. Li y W. Liang, «Effectiveness of virtual laboratory in engineering education: A meta-analysis», PLOS ONE, vol. 19, n.o 12, p. e0316269, dic. 2024, doi: 10.1371/journal.pone.0316269.
- [8] O. Chernikova, N. Heitzmann, M. Stadler, D. Holzberger, T. Seidel, y F. Fischer, «Simulation-based learning in higher education: A meta-analysis», Rev. Educ. Res., vol. 90, n.o 4, pp. 499-541, 2020, doi: 10.3102/0034654320933544.
- [9] N. Rutten, W. R. van Joolingen, y J. T. van der Veen, «The learning effects of computer simulations in science education», Comput. Educ., vol. 58, n.o 1, pp. 136-153, 2012, doi: 10.1016/j.compedu.2011.07.017.
- [10] P. Steif y A. Dollar, «An interactive web-based statics course», en Proc. ASEE Annu. Conf. Expo., Honolulu, HI, EE. UU., 2007, pp. 12.224.1-12.224.12.
- [11] J. Hernández Orozco, J. C. Martínez Sandoval, H. A. Cruz Esquivel, F. G. Puga Vega, y L. G. González Vázquez, «Metodología para realizar una página web para resolver ejercicios de descomposición vectorial en 3 ejes», manuscrito en proceso de publicación, 2026.
- [12] E. Kasneci et al., «ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education», Learn. Individ. Differ., vol. 103, p. 102274, 2023, doi: 10.1016/j.lindif.2023.102274.
- [13] S. Küchemann et al., «Can ChatGPT support prospective teachers in physics task development?», Phys. Rev. Phys. Educ. Res., vol. 19, n.o 2, p. 020128, 2023, doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.19.020128.
- [14] S. Peng, E. Kalliamvakou, P. Cihon, y M. Demirer, «The impact of AI on developer productivity: Evidence from GitHub Copilot», 2023, arXiv: 2302.06590.
- [15] P. Denny et al., «Computing education in the era of generative AI», Commun. ACM, vol. 67, n.o 2, pp. 56-67, 2024, doi: 10.1145/3624720.
- [16] N. Perry, M. Srivastava, D. Kumar, y D. Boneh, «Do users write more insecure code with AI assistants?», en Proc. ACM SIGSAC Conf. Comput. Commun. Secur. (CCS '23), Copenhagen, Dinamarca, 2023, doi: 10.1145/3576915.3623157.
- [17] F. Miao y W. Holmes, Guidance for generative AI in education and research. París, Francia: UNESCO, 2023, doi: 10.54675/EWZM9535.
- [18] R. M. Branch, Instructional design: The ADDIE approach. Nueva York, NY, EE. UU.: Springer, 2009.
- [19] Three.js Contributors, «Three.js – JavaScript 3D library», 2024. [En línea]. Disponible en: <https://threejs.org/>
- [20] J. Hattie y H. Timperley, «The power of feedback», Rev. Educ. Res., vol. 77, n.o 1, pp. 81-112, 2007, doi: 10.3102/003465430298487.