

FUNDAMENTOS Y APLICACIONES COMPUTACIONALES DE LA CONVOLUCIÓN EN INGENIERÍA Y CIENCIAS BÁSICAS

Wendy Falina Espinosa Flores¹, Diana Rojo Morales², Francisco Miguel Hernández López^{3*}

¹Escuela Preparatoria Regional de Tuxpan, Módulo Tonila/Universidad de Guadalajara

²Centro Universitario del Sur/Universidad de Guadalajara

^{3*}Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico José Mario Molina Pasquel y
Henríquez Unidad Académica Tamazula

Resumen - Este artículo presenta un análisis integral de la convolución como operación matemática fundamental y su aplicación en teoría de números, análisis funcional e ingeniería computacional. Se examinan sus fundamentos algebraicos y su relación con el producto de Dirichlet, destacando su papel en el estudio de funciones aritméticas y series de Dirichlet.

A partir de una revisión documental sistematizada, se identifican aplicaciones relevantes en procesamiento digital de imágenes, redes neuronales convolucionales, ecuaciones diferenciales fraccionarias y modelos farmacocinéticos. Los resultados evidencian que la convolución actúa como un puente estructural entre modelos matemáticos abstractos y desarrollos tecnológicos contemporáneos, permitiendo la resolución eficiente de problemas en sistemas dinámicos, visión artificial y simulaciones numéricas avanzadas.

Se concluye que su carácter transversal la posiciona como una herramienta estratégica tanto en matemáticas puras como en ciencias aplicadas, favoreciendo la integración entre teoría formal y modelado computacional.

Índice de Términos - Convolución, Ingeniería computacional, Procesamiento digital de imágenes, Producto de Dirichlet, Teoría de números.

Abstract - This article presents a comprehensive analysis of convolution as a fundamental mathematical operation and its applications in number theory, functional analysis, and computational engineering. Its algebraic foundations and relationship with the Dirichlet product are examined, highlighting its role in the study of arithmetic functions and Dirichlet series.

Based on a systematized documentary review, relevant applications are identified in digital image processing, convolutional neural networks, fractional differential equations, and pharmacokinetic models. The results demonstrate that convolution serves as a structural bridge between abstract mathematical models and contemporary technological developments, enabling efficient problem-

solving in dynamic systems, computer vision, and advanced numerical simulations.

It is concluded that its transversal nature positions it as a strategic tool in both pure mathematics and applied sciences, fostering integration between formal theory and computational modeling.

Key words: Convolution, Computational engineering, Digital image processing, Dirichlet product, Number theory.

I. INTRODUCCIÓN

La convolución constituye una operación matemática fundamental que articula estructuras algebraicas y analíticas con desarrollos computacionales contemporáneos. En la teoría de números, su formulación discreta se expresa mediante el producto de Dirichlet, herramienta esencial para el estudio de funciones aritméticas y su comportamiento multiplicativo, así como para el análisis de series asociadas a la función zeta de Riemann [1]. Esta estructura permite establecer relaciones formales entre propiedades de divisibilidad y transformaciones definidas sobre los enteros positivos.

Desde una perspectiva analítica, la convolución también aparece en el estudio de medidas y en espacios funcionales, donde interviene en la construcción de operadores y en la resolución de problemas asociados a ecuaciones diferenciales y estructuras de tipo Banach [2]. Estas formulaciones amplían su alcance hacia modelos continuos y discretos, consolidando su relevancia dentro del análisis matemático moderno.

En el ámbito aplicado, la convolución desempeña un papel central en el procesamiento digital de imágenes, donde se emplea para la implementación de filtros de suavizado, detección de bordes y extracción de características mediante matrices kernel [3]. Asimismo, en el campo del aprendizaje automático, las redes neuronales convolucionales han convertido esta operación en un mecanismo esencial para la identificación de patrones y clasificación de datos en sistemas de visión artificial [4].

Esta diversidad de aplicaciones evidencia que la convolución no constituye únicamente una herramienta algebraica abstracta, sino un mecanismo estructural transversal que integra teoría matemática formal y modelado computacional. En este contexto, el presente trabajo tiene como objetivo analizar la convolución desde su fundamento teórico hasta su proyección interdisciplinaria en aplicaciones científicas y tecnológicas actuales, mediante una revisión documental sistematizada.

II. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA CONVOLUCIÓN

La convolución puede definirse, en su forma discreta, como una operación binaria entre funciones aritméticas definida sobre los enteros positivos. En el contexto de la teoría analítica de números, el producto de Dirichlet constituye una forma particular de convolución dada por ecuación (1):

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \quad (1)$$

Donde la suma se extiende sobre todos los divisores positivos de n [1]. Esta operación dota al conjunto de funciones aritméticas de una estructura algebraica que permite estudiar propiedades multiplicativas y relaciones inversas, como ocurre con la función de Möbius y la función indicatriz de Euler.

La relevancia estructural del producto de Dirichlet radica en que preserva la multiplicatividad bajo ciertas condiciones, permitiendo caracterizar funciones completamente multiplicativas y establecer relaciones fundamentales en el análisis de series de Dirichlet [1]. En este sentido, la convolución discreta no constituye simplemente una operación auxiliar, sino un mecanismo organizador dentro del estudio de la aritmética analítica.

Desde el punto de vista del análisis matemático, la convolución se extiende a funciones definidas en espacios continuos mediante la expresión integral ecuación (2):

$$(f * g)(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)dt \quad (2)$$

La cual desempeña un papel central en el análisis funcional y en la teoría de operadores lineales. En particular, la convolución de medidas radonianas en espacios de Banach permite generalizar esta operación dentro de contextos abstractos, ampliando su alcance hacia problemas de carácter estructural [2].

Asimismo, la relación entre convolución y derivadas fraccionarias ha sido objeto de estudio reciente, donde se evidencia que ciertos operadores diferenciales pueden

expresarse mediante núcleos convolucionales, facilitando la resolución de ecuaciones con memoria y modelos dinámicos complejos [5]. Esta conexión refuerza la idea de que la convolución actúa como un puente entre estructuras algebraicas discretas y formulaciones analíticas continuas.

De este modo, los fundamentos matemáticos de la convolución muestran una doble naturaleza: por un lado, una estructura algebraica bien definida en el ámbito aritmético; por otro, una herramienta analítica capaz de modelar procesos dinámicos mediante operadores integrales. Esta dualidad explica su proyección posterior en aplicaciones computacionales y tecnológicas.

III. APLICACIONES COMPUTACIONALES Y TECNOLÓGICAS

La proyección interdisciplinaria de la convolución se manifiesta de manera notable en el ámbito computacional. En el procesamiento digital de imágenes, la operación convolucional se implementa mediante el uso de matrices kernel que permiten modificar valores de píxeles en función de su vecindad. Este procedimiento posibilita la aplicación de filtros de suavizado, realce de bordes y detección de patrones, constituyéndose en una herramienta esencial para el análisis visual automatizado [3]. La formulación matricial discreta facilita su implementación eficiente en sistemas digitales.

En el contexto de algoritmos numéricos, se han desarrollado métodos especializados que optimizan el cálculo de convoluciones en problemas de gran escala, particularmente en la resolución de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos complejos [6]. Estas aproximaciones permiten reducir costos computacionales y mejorar la estabilidad numérica en aplicaciones científicas avanzadas.

En el campo del aprendizaje automático, las redes neuronales convolucionales (CNN) han consolidado esta operación como núcleo estructural de sus arquitecturas. Mediante la aplicación repetida de filtros convolucionales, estas redes extraen características jerárquicas de los datos, facilitando tareas de clasificación y reconocimiento de imágenes con alta precisión [4]. La operación matemática original se transforma así en un mecanismo automatizado de extracción de información relevante.

Asimismo, en aplicaciones biomédicas y biotecnológicas, la convolución se emplea para modelar la respuesta de sistemas biológicos ante estímulos externos, describiendo la relación entre señales de entrada y salida mediante productos convolucionales [7]. En el ámbito óptico, su vínculo con la transformada de Fourier permite analizar patrones de difracción y simular sistemas físicos mediante modelos matemáticos avanzados [8].

Finalmente, desde una perspectiva educativa en ingeniería, diversos estudios han señalado la importancia de integrar el formalismo matemático con aproximaciones algorítmicas para favorecer una comprensión más profunda del teorema de convolución [9], [10]. Esta dimensión didáctica refuerza la necesidad de articular teoría y aplicación dentro de la formación científica.

En conjunto, estas aplicaciones evidencian que la convolución no solo constituye una operación abstracta, sino una herramienta estructural que articula matemáticas puras, modelado computacional y desarrollo tecnológico.

IV. METODOLOGÍA

El presente estudio se desarrolló bajo un enfoque de revisión documental analítica, orientado a examinar la evolución conceptual y las aplicaciones interdisciplinarias de la operación de convolución. Se analizaron diez fuentes académicas especializadas, seleccionadas por su relevancia teórica y aplicativa en matemáticas puras, análisis funcional, ingeniería computacional y aplicaciones tecnológicas.

A. Criterios de selección.

Se consideraron trabajos que cumplieran con al menos uno de los siguientes criterios:

- Desarrollo formal del concepto de convolución en teoría de números.
- Extensiones analíticas en espacios funcionales.
- Aplicaciones computacionales en procesamiento digital.
- Implementaciones en inteligencia artificial.
- Aplicaciones en modelado físico o biotecnológico.
- Estudios didácticos en formación ingenieril.

Las fuentes incluyeron artículos científicos arbitrados, memorias académicas y tesis especializadas, priorizando publicaciones con respaldo institucional y rigor matemático.

B. Procedimiento de análisis.

El análisis se realizó en tres fases:

1. Clasificación temática: agrupación de los estudios en categorías conceptuales (fundamentos algebraicos, análisis funcional, aplicaciones computacionales y aplicaciones interdisciplinarias).
2. Comparación estructural: identificación de similitudes y diferencias en la formulación matemática empleada.
3. Síntesis integradora: elaboración de un esquema conceptual que articula la convolución discreta y continua

como operación estructural transversal.

Con el propósito de sistematizar los principales enfoques matemáticos identificados en la literatura, la Tabla I presenta una síntesis de las formulaciones estructurales de la convolución y sus respectivos dominios teóricos.

TABLA I. Enfoques matemáticos de la convolución

Enfoque	Formulación	Referencias
Algebraico discreto	Producto de Dirichlet	[1]
Analítico continuo	Convolución integral en espacios funcionales	[2], [5]
Operadores diferenciales	Núcleos convolucionales y derivadas	[5]

Como se observa en la Tabla I, la convolución adopta una doble naturaleza: discreta en el ámbito algebraico y continua en el análisis funcional. Esta dualidad explica su capacidad de articular estructuras aritméticas con modelos integrales más generales, consolidando su papel como operación transversal en matemáticas puras y aplicadas.

Desde una perspectiva interdisciplinaria, las aplicaciones identificadas evidencian la expansión conceptual de la convolución hacia múltiples áreas científicas y tecnológicas. La Tabla II organiza estas aplicaciones de acuerdo con su campo de desarrollo.

TABLA II. Aplicaciones interdisciplinarias de la convolución

Área	Tipo de aplicación	Referencias
Procesamiento digital	Filtros y matrices kernel	[3]
Aprendizaje automático	Redes neuronales convolucionales	[4]
Modelado biológico	Sistemas dinámicos y respuesta farmacocinética	[7]
Óptica	Patrones de difracción	[8]
Algoritmos numéricos	Optimización computacional	[6]

La clasificación presentada en la Tabla II muestra que, pese a la diversidad de contextos, todas las aplicaciones comparten un núcleo estructural común: la transformación de señales o funciones mediante un operador de agregación dependiente del desplazamiento. Esta característica matemática subyacente confirma la coherencia conceptual entre teoría y práctica.

V. RESULTADOS

El análisis documental permitió identificar que la convolución opera como un mecanismo estructural común en dominios

matemáticos y tecnológicos aparentemente disímiles. A partir de la clasificación presentada en las Tablas I y II, se distinguen dos ejes fundamentales: (i) su formalización algebraico-analítica y (ii) su implementación computacional aplicada.

En el eje algebraico, el producto de Dirichlet define una estructura interna en el conjunto de funciones aritméticas, permitiendo caracterizar propiedades multiplicativas y relaciones inversas [1]. Esta formulación discreta preserva coherencia estructural cuando se extiende al análisis funcional mediante operadores integrales [2], [5]. La revisión evidencia que, aunque los contextos varían, el principio subyacente consiste en la combinación sistemática de funciones mediante desplazamientos controlados.

En el eje computacional, la implementación matricial discreta utilizada en procesamiento digital [3] y la aplicación iterativa en arquitecturas de redes neuronales [4] conservan el mismo núcleo matemático: la agregación ponderada dependiente de un parámetro de traslación. Esta correspondencia estructural sugiere que la convolución puede interpretarse como un operador de agregación con invariancia traslacional, propiedad que se mantiene tanto en formulaciones discretas como continuas. Dicha invariancia constituye el elemento matemático que permite su generalización hacia arquitecturas computacionales modernas.

Adicionalmente, las aplicaciones en modelado biológico [7] y análisis óptico [8] muestran que la convolución permite describir sistemas donde la salida depende de la acumulación histórica de estímulos, característica asociada a sistemas con memoria. En el ámbito numérico, los desarrollos algorítmicos optimizan su cálculo sin alterar su fundamento estructural [6].

En conjunto, los resultados de la revisión permiten afirmar que la convolución actúa como una operación unificadora que conecta:

- Teoría de números (estructura multiplicativa),
- Análisis funcional (operadores integrales),
- Procesamiento digital (filtros discretos),
- Inteligencia artificial (extracción jerárquica de características),
- Modelado físico y biológico (respuesta dinámica).

Esta transversalidad no constituye una simple coincidencia metodológica, sino la manifestación de una propiedad matemática profunda: la capacidad de modelar interacción dependiente de desplazamiento.

VI. DISCUSIÓN

El análisis realizado permite sostener que la convolución constituye una estructura matemática transversal cuya relevancia no depende exclusivamente de su formulación algebraica o analítica, sino de su capacidad de modelar interacciones dependientes de desplazamiento en distintos contextos. Esta propiedad estructural explica su permanencia en

dominios tan diversos como la teoría de números, el análisis funcional y el aprendizaje automático.

Desde una perspectiva conceptual, la revisión evidencia que la transición de la convolución discreta al ámbito continuo no implica una ruptura teórica, sino una extensión natural de su formalismo. El producto de Dirichlet y la convolución integral comparten un principio común: la agregación sistemática de valores mediante una regla de composición estructurada. Este núcleo formal es el que permite su posterior adaptación a matrices discretas en procesamiento digital o a filtros jerárquicos en redes neuronales.

Sin embargo, la literatura revisada muestra que, en algunos contextos aplicados, la implementación computacional tiende a privilegiar la eficiencia algorítmica sobre la comprensión conceptual del operador matemático. Esta disociación puede generar una brecha entre el fundamento teórico y su uso tecnológico, particularmente en procesos formativos en ingeniería. La necesidad de integrar formalismo y aplicación práctica ha sido señalada en estudios didácticos, lo que sugiere que la comprensión estructural de la convolución debe fortalecerse en la formación científica.

Asimismo, aunque las aplicaciones interdisciplinarias demuestran la versatilidad del operador, la revisión también revela que no siempre se explicita el vínculo conceptual entre las distintas formulaciones. En este sentido, uno de los aportes del presente trabajo consiste en evidenciar la coherencia estructural que subyace a estas aplicaciones, proponiendo una lectura integradora que conecta modelos discretos, continuos y computacionales.

Como línea futura de investigación, resulta pertinente profundizar en la construcción de marcos teóricos que articulen explícitamente la transición entre formulaciones algebraicas y arquitecturas computacionales modernas, particularmente en entornos de inteligencia artificial, donde la operación convolucional ha adquirido un protagonismo tecnológico sin que siempre se reconozca su fundamento matemático profundo.

Una limitación del presente estudio radica en su carácter documental, ya que no se realizó una validación experimental de los modelos analizados. Sin embargo, el objetivo fue establecer una síntesis conceptual transversal más que evaluar desempeño cuantitativo.

VII. CONCLUSIONES

El análisis desarrollado permite afirmar que la convolución constituye una operación matemática estructural cuya relevancia trasciende su formulación original en la teoría de números. Tanto en su versión discreta como continua, la convolución mantiene un principio común de agregación dependiente de desplazamiento, lo que le confiere coherencia

conceptual a través de distintos dominios matemáticos y tecnológicos.

La revisión documental evidencia que el producto de Dirichlet y la convolución integral representan expresiones complementarias de una misma estructura formal, la cual se proyecta posteriormente en aplicaciones computacionales como el procesamiento digital de imágenes y las redes neuronales convolucionales. Esta continuidad demuestra que la operación no se transforma esencialmente al cambiar de contexto, sino que adapta su formalización a las necesidades del entorno disciplinar.

Asimismo, se identifica que la transversalidad de la convolución radica en su capacidad para modelar interacción, acumulación y dependencia histórica en sistemas dinámicos, lo que explica su presencia en modelado físico, biotecnológico y algoritmos numéricos avanzados.

Finalmente, se concluye que la convolución puede entenderse como un operador unificador que articula teoría matemática y desarrollo tecnológico contemporáneo, destacando la importancia de preservar su comprensión estructural en procesos formativos y de investigación interdisciplinaria. Esta perspectiva permite reconsiderar la convolución no solo como herramienta técnica, sino como categoría estructural central en la matemática contemporánea aplicada.

REFERENCIAS

- [1] T. M. Apostol, *Introducción a la teoría analítica de números*. Barcelona, España: Editorial Reverté, 1980.
- [2] L. Posada Vera and G. Restrepo, “Convolución de medidas radonianas con valores en álgebras de Banach separables,” *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, vol. 20, no. 1, pp. 49–62, 2012.
- [3] F. Giménez-Palomares, J. A. Monsoriu, and E. Alemany-Martínez, “Aplicación de la convolución de matrices al filtrado de imágenes,” *Modelling in Science Education and Learning*, vol. 9, no. 2, pp. 5–17, 2016, doi: 10.4995/msel.2016.4524.
- [4] F. Fortanel Rojas, “Redes neuronales convolucionales en la clasificación de cultivos,” Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2019.
- [5] C. E. Mejía, “Una convolución muy útil y unas derivadas ilustres,” *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, vol. 43, no. 168, pp. 563–571, 2019, doi: 10.18257/raccefyn.767.
- [6] L. Banjai and M. López-Fernández, “Efficient convolution algorithms adapted to applications,” in *Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española*, Ciudad Real, España, 2022.
- [7] A. I. Estrada Roa, “Uso del producto de convolución en el método modelo-independiente del factor de crecimiento epidérmico para ingeniería genética,” *Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional*, 2012.
- [8] E. Andrés-Zárate, Q. Angulo-Córdova, G. Gutiérrez-Tepach, and J. A. Hernández-Nolasco, “Modelo matemático de convolución y el patrón de difracción,” *Journal of Energy, Engineering Optimization and Sustainability*, vol. 2, no. 2, pp. 1–12, 2018, doi: 10.19136/jeeos.a2n2.2792.

[9] E. Bosquez, J. Lezama, and C. Mora, “Algunas reflexiones de contraste del formalismo con la algoritmia en la enseñanza del teorema de convolución en escuelas de ingeniería,” *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 23, pp. 361–368, 2010.

[10] E. Bosquez, A. Romo, and J. Lezama, “Análisis de una secuencia didáctica para dar sentido al teorema de convolución en formación de ingenieros,” in *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, pp. 484–492, 2011.